第45講　コーシー・シュワルツの不等式

45 次の各問いに答えよ.

(1) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ を示せ.

(2) x_i, y_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ が実数であるとき

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2\right)$$

を示せ.

(3) a と b は $a<b$ を満たす実数とするとき

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2dx\right)$$

を示せ.

(4) $x+y+z+w=1$ を満たす正の実数 x, y, z, w に対して $\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{y}+\dfrac{81}{z}+\dfrac{256}{w}$ の最小値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 45 講　コーシー・シュワルツの不等式

45　定積分 $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$ の値が $\dfrac{25}{6}$ より大きいことを示せ.

必要であれば，定数関数 0 でない 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に関して，$f(x)$ が $g(x)$ の実数定数倍になっていないときには

$$\left(\int_1^2 f(x)g(x)dx\right)^2<\left(\int_1^2\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_1^2\{g(x)\}^2dx\right)$$

が成り立つことを用いてもよい.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　コーシー・シュワルツの不等式

45 次の各問いに答えよ．

(1) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ を示せ．

(2) x_i，y_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が実数であるとき

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2\right)$$

を示せ．

(3) a と b は $a<b$ を満たす実数とするとき

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$$

を示せ．

(4) $x+y+z+w=1$ を満たす正の実数 x，y，z，w に対して $\dfrac{1}{x}+\dfrac{16}{y}+\dfrac{81}{z}+\dfrac{256}{w}$ の最小値を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 900 $\left(x=\dfrac{1}{30},\ y=\dfrac{2}{15},\ z=\dfrac{3}{10},\ w=\dfrac{8}{15}\right.$ のとき)

【解答】

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，内積の定義より $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ であるので

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)\geqq 0$$

より $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \geqq (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$ となる．

ここで，等号は $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)=0$ よって $|\vec{a}|=0$，$|\vec{b}|=0$，$\cos\theta=\pm 1$，つまり $\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ または $\vec{a}\mathbin{/\!/}\vec{b}$ のとき成り立つ．

(2) $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_3)=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ のとき，明らかに与式は成り立つ．

以下 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_3)\neq(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2\\
&=(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)(y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots\cdots+y_n{}^2)-(x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i{}^2y_j{}^2+x_j{}^2y_i{}^2)-2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}x_ix_jy_iy_j\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\geqq 0
\end{aligned}$$

より $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i{}^2\right)$ は示された．

等号成立は $1\leqq i<j\leqq n$ を満たすすべての i，j について $x_iy_j=x_jy_i$ となるとき，つまり実数 k を用いて $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)=k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ と表せるときである．

(3) $f(x)$ が定数関数 0 の場合には明らかに与式は成り立つ．

以下，$f(x)$ が定数関数 0 でないとする．

このとき $a<b$ より $\displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^2 dx>0$ であり，実数 t に対して常に $\{tf(x)-g(x)\}^2\geqq 0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

すなわち $t^2\{f(x)\}^2-2tf(x)g(x)+\{g(x)\}^2\geqq 0$ が成り立つ．
区間 $[a,\ b]$ において積分することで

$$\left(\int_a^b\{f(x)\}^2dx\right)t^2-2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)t+\left(\int_a^b\{g(x)\}^2dx\right)\geqq 0$$

が任意の実数 t に関して成り立つことがわかる．

左辺を t の2次関数とみて，それが常に0以上になる条件は，$\int_a^b\{f(x)\}^2dx>0$ より

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-\left(\int_a^b\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_a^b\{g(x)\}^2dx\right)\leqq 0$$

ゆえに与えられた不等式が成り立つことが示された．

等号成立は $tf(x)-g(x)=0$ がすべての実数 x に関して成り立つ実数 t が存在すること，つまりある実数 t に対して $g(x)=tf(x)$ がすべての x に関して成り立つことである．

(4)　(2)より，実数 $a,\ b,\ c,\ d,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ に関して

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta)^2\leqq(a^2+b^2+c^2+d^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．等号成立は $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ または
$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=k(a,\ b,\ c,\ d)$ となる実数 k が存在するときである．

問題文より $xyzw\neq 0$ であるので，①において

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(\sqrt{x},\ \sqrt{y},\ \sqrt{z},\ \sqrt{w}),\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\ \frac{4}{\sqrt{y}},\ \frac{9}{\sqrt{z}},\ \frac{16}{\sqrt{w}}\right)$$

とおける．このとき $x+y+z+w=1$ を用いると

$$\left(\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}\cdot\frac{4}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\cdot\frac{9}{\sqrt{z}}+\sqrt{w}\cdot\frac{16}{\sqrt{w}}\right)2$$

$$\leqq\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2+(\sqrt{w})^2\}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\frac{4}{\sqrt{y}}\right)^2+\left(\frac{9}{\sqrt{z}}\right)^2+\left(\frac{16}{\sqrt{w}}\right)^2\right\}$$

$$\therefore\quad 900\leqq\frac{1}{x}+\frac{16}{y}+\frac{81}{z}+\frac{256}{w}$$

となる．

ここで，等号が成立する条件は $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)=k(a,\ b,\ c,\ d)$ となる実数 k が存在する，つまり

$$\alpha:a=\beta:b=\gamma:c=\delta:d$$

よって　$\sqrt{x}:\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{y}:\dfrac{4}{\sqrt{y}}=\sqrt{z}:\dfrac{9}{\sqrt{z}}=\sqrt{w}:\dfrac{16}{\sqrt{w}}$

であるので，この式の値を t とおくと $x=t,\ y=4t,\ z=9t,\ w=16t$ となり，これと $x+y+z+w=1$ より $t=\dfrac{1}{30}$ となる．

以上より，$x=\dfrac{1}{30},\ y=\dfrac{2}{15},\ z=\dfrac{3}{10},\ w=\dfrac{8}{15}$ のとき求める最小値は **900**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　コーシー・シュワルツの不等式

45　定積分 $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$ の値が $\dfrac{25}{6}$ より大きいことを示せ．

必要であれば，定数関数 0 でない 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に関して，$f(x)$ が $g(x)$ の実数定数倍になっていないときには

$$\left(\int_1^2 f(x)g(x)dx\right)^2<\left(\int_1^2\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_1^2\{g(x)\}^2dx\right)$$

が成り立つことを用いてもよい．

【答】 略

【解答】

$f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ とおくと $f(x)$ は $g(x)$ の実数定数倍になっておらず，2 つとも定数関数ではない．

よって

$$\left\{\int_1^2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\right\}^2<\left(\int_1^2(\sqrt{x})^2dx\right)\left\{\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx\right\}\quad\cdots\cdots①$$

が成り立つ．

ここで

$$\left\{\int_1^2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\right\}^2=\left(\int_1^2(x+1)dx\right)^2$$

$$=\left(\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^2\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

であり，$\displaystyle\int_1^2(\sqrt{x})^2dx=\int_1^2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\frac{3}{2}$ より①は

$$\frac{25}{4}<\frac{3}{2}\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$$

となる．よって $\displaystyle\int_1^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx>\frac{25}{6}$ が示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。